DE LA PROPAGATION DU SON.

PAR M. EULER.

1.

Les Phyſiciens auſſi bien que les Géometres ſe ſont donné bien de la peine pour expliquer, comment le ſon eſt tranſmis par l'air, mais il faut avouer que la Théorie en a été jusqu'ici fort incomplette. Ce que le Grand Newton a donné ſur cette matiere eſt plus ingénieux que ſuffiſant, ayant fondé ſes raiſonnemens ſur des hypotheſes purement arbitraires; & M. de la Grange, très ſavant Géometre à Turin, vient de remarquer très judicieuſement dans le premier Volume des *Miſcellanea Phyſico-Mathematica* publiés à Turin A. 1759, que quelques autres hypotheſes qu'eût priſes Newton, il en auroit tiré les mêmes concluſions. Cela pourroit bien ſuffire pour nous aſſurer de la juſteſſe des concluſions, qui regardent la viteſſe dont le ſon eſt tranſmis par l'air; mais le vrai mouvement dont les particules de l'air ſont ébranlées ſucceſſivement, nous demeure égalément inconnu: & nous ne ſaurions nous vanter de comprendre la propagation du ſon, à moins que nous ne fuſſions en état d'expliquer clairement, comment ces ébranlemens ſont engendrés & transmis dans l'air.

2. Tous ceux qui ont traité cette matiere après Newton, ou ſont tombés dans le même défaut, ou voulant approfondir le vrai mouvement de l'air, ſe ſont précipités dans des calculs intraitables; d'où l'on ne ſauroit abſolument tirer aucune concluſion; & je dois avouer qu'il m'eſt arrivé l'un ou l'autre, toutes les fois que j'ai entrepris cette recherche. Je fus donc bien agréablement ſurpris, lorsque je vis dans cet excellent Livre que je viens d'alléguer, que M. de la Grange a ſurmonté heureuſement toutes ces difficultés, & cela par des calculs, qui

qui paroiſſent tout à fait indéchiffrables. C'eſt ſans contredit une des plus importantes découvertes, qu'on ait faites depuis longtems dans les Mathématiques, & qui nous pourra conduire à bien d'autres.

3. En examinant ces calculs prodigieux, j'ai penſé d'abord s'il ne ſeroit pas poſſible de parvenir au même but par une route plus facile; & après quelques efforts j'y ſuis arrivé. J'aurai donc l'honneur d'expliquer ici la méthode qui me ſemble la plus propre pour cette recherche; mais, quelque ſimple qu'elle puiſſe paroitre, je dois proteſter qu'elle ne me ſeroit pas venüe dans l'eſprit, ſi je n'avois vu l'ingénieuſe Analyſe de M. de la Grange. Il y a une circonſtance qui nous arrêteroit tout court, ſi l'Analyſe n'étoit applicable qu'à des quantités continues, ou dont la nature puiſſe être repréſentée par une courbe reguliere, ou renfermée dans une certaine équation. Ce n'eſt donc que l'adreſſe d'introduire des quantités diſcontinues dans le calcul, qui nous peut conduire à la ſolution cherchée: & cela ſe peut faire d'une maniere ſemblable à celle dont j'ai déterminé le mouvement d'une corde, à laquelle on aura donné au commencement une figure quelconque inexplicable par aucune équation.

4. En effet, on n'a qu'à enviſager la propagation du ſon comme elle ſe fait actuellement: l'air étant bruſquement agité en quelque endroit, les particules d'air qui en ſont aſſés éloignées, n'en reſſentent d'abord rien: ce n'eſt qu'après un certain tems, qu'elles ſont ébranlées, & depuis elles ſont rétablies dans un parfait équilibre. Concevons donc une particule quelconque, éloignée du lieu où ſe fait l'impulſion, de la diſtance $= x$, & qu'après le tems T elle reçoive l'agitation pendant un moment $= \theta$. Maintenant, ſi nous conſidérons l'état de cette particule, & que nous poſions ſa viteſſe $= v$, elle doit dependre en ſorte de la diſtance x & du tems t, que tant que t eſt moindre que T, il ſoit $v = 0$: ou que la viteſſe v ait une valeur finie, pendant que le tems t eſt pris entre les limites T & $T + \theta$, mais qu'en prenant $t > T + \theta$, la viteſſe v redevienne pour toujours égale à zéro. On voit bien que cela ne ſauroit être repréſenté par aucune fonction reguliere du tems t.

5. Il

5. Il ne faut pas penser qu'une fonction semblable à celles qui représentent les courbes toutes renfermées dans un certain espace, soit propre à exprimer l'état des particules de l'air dans la propagation du son: une telle fonction de t, qui n'auroit des valeurs réelles, que tant que t se trouve entre les unités T & $T + \theta$, ne convient nullement à notre cas pour exprimer la valeur de v, puisqu'elle donneroit pour les cas où $t < T$, ou $t > T + \theta$, des valeurs imaginaires, au lieu que la vitesse v est alors véritablement $= 0$, & point du tout imaginaire. On ne sauroit dire non plus, que la vitesse seroit alors extrèmement petite, mais pourtant variable, afin qu'elle puisse être considérée comme liée par la loi de continuité avec les valeurs finies qu'elle reçoit pendant l'intervalle de tems θ: car, avant l'agitation qui arrive à cette particule, & après, elle se trouve dans un aussi parfait repos que s'il n'y avoit eu jamais d'agitation. C'est sans doute une des principales raisons qui ont empêché de soumetre au calcul la propagation du son.

6. Mr. de la Grange a heureusement évité cet écueil, ayant considéré les particules de l'air comme isolées, sans former un tout continu: & dans cette vue il leur a assigné une grandeur finie, de sorte que le nombre de toutes les particules dispersées par un intervalle quelconque demeurât fini. Il s'est servi de la même méthode, dont il a déterminé dans le même ouvrage les vibrations d'une corde chargée d'un nombre fini de poids; & c'est par cette méthode qu'il a fait voir, par la résolution des équations, que le calcul peut montrer un ébranlement dans une seule particule de l'air, pendant que toutes les autres demeurent en repos. Or à la fin on voit, que le nombre des particules n'entre plus en considération, & que la même circonstance doit avoir lieu en supposant infini le nombre des particules d'air, qui remplissent un certain espace. Tout revient donc à ce qu'on sache introduire des fonctions discontinues dans l'Analyse, qui sert à résoudre ce problème: ce qui paroit un grand paradoxe.

7. En effet, lorsque je donnai ma solution générale pour les vibrations des cordes, qui comprend aussi les cas où la corde auroit

eu au commencement une figure irréguliere & inexprimable par aucune équation; elle parut dabord fort ſuſpecte à quelques grands Géometres. Et M. d'Alembert aima mieux ſoutenir, que dans ces cas il étoit abſolument impoſſible de déterminer le mouvement d'une corde, que d'admettre ma ſolution, quoiqu'elle ne differe en rien de la ſienne dans les autres cas. Il n'étoit pas même ſuffiſant de faire voir, comme j'ai fait, que ma conſtruction ſatisfaiſoit parfaitement à l'équation différentielle du ſecond degré, qui renferme ſans contredit la véritable ſolution: la diſcontinuité lui parut toujours incompatible avec les loix du calcul. Mais à préſent M. de la Grange ayant juſtifié pleinement ma ſolution, & cela d'une maniere inconteſtable, je ne doute pas qu'on ne reconnoiſſe bientôt la néceſſité des fonctions discontinues dans l'Analyſe, ſurtout quand on verra, que c'eſt l'unique moyen d'expliquer la propagation du ſon.

8. Le paradoxe paroitra encore plus grand, quand je dis, qu'il y a une partie très conſidérable du calcul intégral, où l'on eſt obligé d'admettre de telles fonctions discontinues, auſſi bien qu'on admet des conſtantes arbitraires dans les intégrations ordinaires. Comme le calcul intégral eſt une méthode de trouver des fonctions d'une ou de pluſieurs variables, lorsqu'on connoit quelque rapport entre leurs différentiels du premier ordre, ou d'un plus haut: toute la partie où il s'agit des fonctions de deux ou pluſieurs variables, eſt ſuſceptible de fonctions quelconques, ſans en excepter les discontinues: & cela par la même raiſon, que les fonctions d'une ſeule variable, qu'on trouve par l'intégration, reçoivent une conſtante arbitraire, qu'il faut déterminer enſuite par les conditions eſſentielles à chaque queſtion.

9. Pour mettre cela dans tout ſon jour, cherchons une fonction z de deux variables x & t, de ſorte qu'il ſoit $\left(\frac{dz}{dt}\right) = a\left(\frac{dz}{dx}\right)$, où l'on ſait déjà que $\left(\frac{dz}{dt}\right)$, marque la fraction $\frac{dz}{dt}$, en ne ſuppoſant

que

que t variable, & $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, la fraction $\frac{dz}{dx}$, en ne ſuppoſant que x variable. Cette condition eſt ſemblable à celle qui renferme le mouvement des cordes vibrantes, qui eſt $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = a \left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$, qui ne differe de celle-là, que puisqu'il y a ici des différentiels du ſecond degré; de ſorte que les mêmes circonſtances ont lieu dans l'une & dans l'autre. Or il eſt évident qu'on ſatisfait à la condition $\left(\frac{dz}{dt}\right) = a \left(\frac{dz}{dx}\right)$, en prenant pour z une fonction quelconque de $x + at$, ſans en exclure les fonctions discontinues. Car concevant une courbe quelconque tracée de main libre ſans aucune loi, ſi l'on prend l'abſciſſe $= x + at$, l'appliquée donnera une juſte valeur de z, qui ſatisfait à l'équation $\left(\frac{dz}{dt}\right) = a \left(\frac{dz}{dx}\right)$, & puisqu'on ne demande pas autre choſe, il n'y a rien qui nous oblige à croire, qu'une courbe réguliere & continue ſoit plus propre à remplir cette condition, qu'une irréguliere & diſcontinue, & encore moins que celles-ci doivent être exclues.

10. Suppoſons qu'il s'agiſſe du mouvement d'un fil, & que les conditions ſoient telles, qu'il s'enſuive qu'après un tems quelconque t il réponde à l'abſciſſe x une appliquée z en ſorte qu'il ſoit $\left(\frac{dz}{dt}\right) = a \left(\frac{dz}{dx}\right)$: & je dis que prenant z égale à une fonction quelconque de la quantité $x + at$, ou $z = \Phi : (x + at)$, on aura réſolu généralement le probleme, quelque fonction ſoit reguliere ſoit irréguliere que marque le ſigne Φ. Mais la ſignification de ce même ſigne eſt toujours déterminée par la nature de la queſtion, qui ne ſauroit ſubſiſter, à moins que la figure du fil pour quelque moment ſavoir $t = 0$, ne fut donnée; or alors ayant $z = \Phi : x$, cela doit être préciſément l'équation pour la figure initiale du fil, quelle qu'elle ait

été

été, soit réguliere, soit irréguliere. Maintenant, connoissant cette figure, on en déterminera aisément la figure que le fil aura après un tems quelconque t; car à une abscisse quelconque x il répondra la même appliquée, qui répond dans la figure initiale à l'abscisse $x + at$.

11. C'est sur un semblable raisonnement qu'est fondée ma construction du probleme des cordes vibrantes, & qui est à présent mise à l'abri de toute objection. C'est aussi sur ce même fondement, que j'établirai la solution du probleme sur la propagation du son, & qui me dispensera des calculs embarrassans que M. de la Grange a été obligé de développer. Je conçois donc ce probleme sous le même point de vue que cet habile Géometre, en ne considérant que les particules de l'air qui sont situées sur une même ligne droite, suivant laquelle se fait la propagation du son. Car, quoique le son se répande de toute part également, il semble très certain que la propagation suivant chaque ligne droite n'est pas troublée par les mouvemens des particules voisines autour d'elle. Cependant il seroit bien à souhaiter qu'on pût résoudre cette question en déterminant l'agitation par toute l'étendue de l'Atmosphere: mais on y rencontre des difficultés qui paroissent encore insurmontables. Je m'arrêterai donc comme M. de la Grange, au seul mouvement qui se fait par une ligne droite.

Analyse pour la propagation du son sur une ligne droite.

Fig. 1. 12. Je ne considere donc qu'une seule étendue de l'air suivant la ligne droite AE, tout comme si l'air étoit renfermé dans un tuyau infiniment mince AE, que je supposerai de plus bouché par les deux extrémités en A & E, afin que les circonstances auxquelles il faut appliquer le calcul soient parfaitement déterminées. Soit la longueur de ce tuyau AE $= a$, & sa largeur, que je suppose partout la même & quasi infiniment petite $= ee$, de sorte que le volume d'air contenu dans le tuyau soit $= aee$. Soit d'abord cet air en équilibre, ou de la même densité par toute la longueur du tuyau, de sorte que son elasticité soit aussi par tout la même; que la hauteur h soit la mesure de l'elasticité dans cet état d'équilibre, qu'il faut entendre

en

en ſorte, que l'élaſticité ſoit balancée par le poids d'une colonne d'air, dont la hauteur $= h$, ou bien que chaque particule d'air dans le tuyau ſoit preſſée de part & d'autre par le poids d'une maſſe d'air ſemblable, dont le volume eſt $= hee$, & que l'elaſticité ſoit en équilibre avec cette preſſion.

13. Que cet air dans le tuyau ait maintenant eſſuyé une agitation quelconque, dont l'état d'équilibre ſoit troublé, & pour en repréſenter l'effet, conſidérons trois points infiniment proches, qui dans l'état d'équilibre ayent été en P, Q, R, à des intervalles égaux & infiniment petits $PQ = QR = \omega$, & qui par l'agitation arrivée ayent été tranſportés après le tems $= t$ en p, q, r, de ſorte que les particules d'air compriſes entre les points P, Q, R, ſe trouvent maintenant entre les points p, q, r, & partant plus ou moins condenſées, ſelon que les intervalles pq & qr, ſont plus petits ou plus grands que les intervalles naturels PQ & QR, & l'élaſticité ſera changée dans le même rapport. Pour connoître ce changement, poſons pour l'état d'équilibre les diſtances

$$AB = x; \quad AQ = x' = x + \omega; \quad AR = x'' = x + 2\omega,$$

& pour l'état troublé $Pp = y$; $Qq = y'$; $Rr = y''$, de là nous aurons les intervalles $pq = \omega + y' - y$, & $qr = \omega + y'' - y'$, & les maſſes des particules d'air qui y ſont contenues ſeront les mêmes qui occupoient dans l'état d'équilibre les intervalles PQ & QR $= \omega$, & partant $= ee\omega$.

14. Qu'on obſerve ici que les quantités x ſe rapportent à l'état d'équilibre, & qu'elles expriment la diſtance de chaque particule d'air depuis le point fixe A: mais que les quantités y marquent le dérangement de chaque particule cauſé par l'agitation qui lui convient après le tems t. Ainſi la particule d'air, qui dans l'état d'équilibre étoit éloignée du point fixe A de l'intervalle $= x$, s'entrouvrira après le tems $= t$ de l'intervalle $= x + y$, & partant l'air ne ſera pas en équilibre, à moins que toutes les y ne ſoient évanouiſſantes,

tes, si l'on met perpendiculairement aux points P, Q, R, les appliquées Pp', Qq', Rr', égales aux intervalles Pp, Qq, Rr, la ligne courbe qui passe par les points p', q', r', marquera l'état troublé de l'air dans le tuyau pour le tems $= t$: où il évident que la premiere de ces appliquées en A, & la derniere en E, doivent évanouir. Car, puisque le tuyau est fermé par les deux extrémités, les particules d'air en A & E ne sauroient s'éloigner de leurs places.

15. L'élasticité qui étoit dans l'état d'équilibre partout exprimée par la hauteur $= h$, sera à présent dans l'intervalle pq exprimée par une hauteur $= \frac{h.\,PQ}{pq}$, & dans l'intervalle qr par une hauteur $= \frac{h.\,QR}{qr}$. Donc, ayant posé $PQ = QR = \omega$, puisque $pq = \omega + y' - y$, & $qr = \omega + y'' - y'$, la hauteur qui mesure l'elasticité dans l'intervalle pq sera $= \frac{h\omega}{\omega + y' - y}$, & dans l'intervalle $qr = \frac{h\omega}{\omega + y'' - y'}$. Or c'est de l'inégalité de ces hauteurs que dépend l'accélération ou retardation du mouvement de la particule en q. Pour cet effet, ayant partagé toute la longueur AE en des intervalles infiniment petits & égaux entr'eux $= \omega$, dont chacun contient un volume d'air $= ee\omega$, dans l'état d'équilibre, concevons ces particules comme réunies dans les points P, Q, R, pour avoir maintenant en q un volume d'air $= ee\omega$: qui sera poussé en arriere vers A par une force $= \frac{eeh\omega}{\omega + y'' - y'}$, & en avant vers E par une force $= \frac{eeh\omega}{\omega + y' - y}$.

16. Joignant

16. Joignant ces deux forces, la particule d'air en q sera poussée selon la direction qE, par la force qui est

$$= \frac{eeh\omega\,(y'' - 2y' + y)}{(\omega + y' - y)(\omega + y'' - y')};$$

dont la distance depuis le point fixe A étant $Aq = x' + y'$, dont la partie x' demeure invariable par rapport au tems t, l'autre partie y' seule souffrira l'effet de cette force, & pendant l'élément du tems dt, on aura, conformément aux principes de mécanique, en divisant par la masse $ee\omega$ cette équation

$$\frac{ddy'}{dt^2} = \frac{2gh\,(y'' - 2y' + y)}{(\omega + y' - y)\,(\omega + y'' - y')},$$

où g marque la hauteur par laquelle un corps grave tombe dans une seconde, & alors le tems t sera exprimé en secondes. Il s'agit donc de trouver pour chaque abscisse x, & pour chaque tems t, la valeur de l'intervalle y.

17. Considérons maintenant aussi x comme variable, & il est clair que y sera une fonction des deux variables x & t; & puisque dans la formule $\frac{ddy}{dt^2}$ on suppose x constante, nous devons écrire $\left(\frac{ddy}{dt^3}\right)$ pour éviter toute ambiguité. Ensuite, l'autre membre de notre équation ne regarde que la variabilité de x: posant donc $\omega = dx$, nous aurons $y' - y = dx\left(\frac{dy}{dx}\right)$, &

$$y'' - 2y' + y = dx^2\left(\frac{ddy}{dx^2}\right);$$

d'où notre équation prendra cette forme:

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = 2gh\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) : \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right),$$

 qui

qui ſeroit encore bien difficile à réſoudre. Mais on ſuppoſe de plus, que les agitations ſont extrémement petites, & que les y évanouïſſent quaſi par rapport aux x; au moins on peut ſe contenter de connoitre la propagation du ſon, quand les agitations ſont fort petites, & alors rejettant le terme $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$, on aura à réſoudre cette équation

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = 2gh\left(\frac{ddy}{dx^2}\right).$$

18. Il en eſt ici de même que de la vibration des cordes, dont on ſuppoſe auſſi infiniment petites les excurſions, & nonobſtant cela les Géometres prétendent avoir bien expliqué les mouvemens des cordes. Donc auſſi dans notre cas je ne chercherai que les phénomenes des agitations extrèmement petites, de ſorte que la courbe qui paſſe par les points p', q', r', ne s'éloigne qu'infiniment peu de l'axe AE, tout comme on enviſage la figure des cordes. Cette reſſemblance va encore plus loin, puisque cette même équation qui exprime la propagation du ſon, détermine auſſi les ébranlemens d'une corde fixée par les termes A & E. Nous aurons donc auſſi la même équation intégrale, qui dans toute ſon étendue eſt:

$$y = \Phi : (x + t\sqrt{2gh}) + \Psi : (x - t\sqrt{2gh}).$$

Cette intégrale eſt même complette, puisqu'elle renferme deux formes arbitraires de fonctions, tout comme la double intégration exige.

19. Pour déterminer la nature de ces deux fonctions, il en faut faire l'application aux conditions preſcrites dans la queſtion: & d'abord il eſt clair, que poſant $t = 0$, l'équation: $y = \Phi : x + \Psi : x$, exprime l'état de l'air dans le tuyau lorsqu'il reçut la premiere agitation. Donc ſi nous poſons, que par l'agitation l'air dans le tuyau AE Fig. 2. ait été reduit dans l'état repréſenté par la courbe AZE, de ſorte que chaque point X ait été tranſporté vers E par un intervalle $=$ XZ; nommant AX $= x$, & XZ $= z$, nous aurons $z = \Phi : x + \Psi : x$. Puisque z eſt une fonction donnée de x, ſoit elle $z = \Theta : x$, & nous

nous aurons $\Phi: x + \Psi: x = \Theta x$, d'où la nature de l'une de nos deux fonctions indéterminées Φ & Ψ sera déterminée. Or il faut bien remarquer, que la courbe AZE doit être dans son étendue quasi infiniment proche de l'axe AE: cependant elle doit se réunir avec l'axe aux deux extrêmités A & E, de sorte que z soit très petite, & tout à fait $= 0$, aux cas $x = 0$, & $x = a$.

20. L'autre détermination doit être tirée du mouvement que toutes les particules d'air auront eu au premier moment de l'agitation. Concevons donc une autre courbe donnée AVE, dont les appliquées XV $= v$, expriment les vitesses, qui ont été imprimées aux particules d'air X dans le sens XE; de sorte que v soit aussi une fonction donnée de x. Car, quelle que soit l'agitation, son premier effet sera toujours déterminé par ces deux courbes AZE & AVE, dont la premiere montre l'espace par lequel chaque particule a été transportée, & l'autre montre la vitesse qui lui a été imprimée par ce mouvement. Si l'on veut que les particules d'air, ayant été poussées par les intervalles marqués, y soient arrêtées, & ensuite subitement relâchées, la courbe AVE conviendra avec l'axe AE, de sorte que par tout $v = 0$. Mais toujours il faut remarquer, que les vitesses en A & E doivent être $= 0$.

21. Pour profiter de cette condition, cherchons en général la vitesse d'un point quelconque qui est $\left(\frac{dy}{dx}\right)$: il faut différentier nos fonctions, & employant pour cet effet les signes suivans: $d. \Phi: u = du \Phi': u$, & $d. \Psi: u = du \Psi': u$, la formule $y = \Phi: (x + t \sqrt{2gh}) + \Psi: (x - t \sqrt{2gh})$, en ne prenant que t pour variable donnera

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = \sqrt{2gh}. (\Phi': (x + t\sqrt{2gh}) - \Psi': (x - t\sqrt{2gh})),$$

&

& partant au commencement où $t = 0$, & la viteſſe $= v$, nous aurons:

$$\frac{v}{\sqrt{2gh}} = \Phi' : x - \Psi' : x.$$

Multiplions par dx, & intégrons pour avoir;

$$\frac{\int v\,dx}{\sqrt{2gh}} = \Phi : x - \Psi : x,$$

où $\int v\,dx$ ou l'aire AXV étant auſſi une fonction donnée de x, ſoit elle $\int v\,dx = \Sigma : x$, & nous aurons cette équation:

$$\Phi : x - \Psi : x = \frac{\Sigma : x}{\sqrt{2gh}}.$$

22. Cette équation jointe à celle, que nous avons trouvée ci-deſſus $\Phi : x + \Psi : x = \Theta : x$, déterminera la nature de toutes les deux fonctions générales Φ & Ψ par les deux fonctions données Θ & Σ, d'où nous obtiendrons:

$$\Phi : x = \tfrac{1}{2}\Theta : x + \frac{\tfrac{1}{2}\Sigma : x}{\sqrt{2gh}}, \quad \& \quad \Psi : x = \tfrac{1}{2}\Theta : x - \frac{\tfrac{1}{2}\Sigma : x}{\sqrt{2gh}}.$$

Donc notre équation générale, qui marque après un tems quelconque t le lieu de la particule X, ſera

$$y = \frac{\Theta(x + t\sqrt{2gh}) + \Theta(x - t\sqrt{2gh})}{2} + \frac{\Sigma(x + t\sqrt{2gh}) - \Sigma(x - t\sqrt{2gh})}{2\sqrt{2gh}},$$

& la viteſſe de cette même particule vers E ſera

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{\Theta'(x + t\sqrt{2gh}) - \Theta'(x - t\sqrt{2gh})}{2}\sqrt{2gh} + \frac{\Sigma'(x + t\sqrt{2gh}) + \Sigma'(x - t\sqrt{2gh})}{2},$$

où il faut remarquer que $\Sigma' : x = v$ puisque $\Sigma : x = \int v\,dx$.

23. Maintenant toute la ſolution ſeroit déterminée, ſi les deux extrémités A & E étoient éloignées à l'infini. Car décrivant encore une autre courbe ASF dont les appliquées XS expriment les

les aires AXV, de sorte que $XS = \Sigma: x$, on pourroit prendre dans les deux courbes AZE, où $XZ = \Theta: x$, les appliquées qui répondent à toutes les abscisses $x + t\sqrt{2gh}$, & $x - t\sqrt{2gh}$, & de là on auroit pour tous les momens les quantités y, qui conviennent à chaque particule d'air X. Mais, dès que le fil d'air AE est terminé par les points A & E au delà desquels l'agitation ne sauroit être communiquée, ces courbes formées sur le premier état de l'air ne fournissent plus les appliquées qui répondent aux abscisses $x + t\sqrt{2gh}$, quand elles sont plus grandes que $AE = a$, ni aux abscisses $x - t\sqrt{2gh}$, quand elles sont négatives. Il ne s'agit pas ici de la continuation naturelle de ces courbes, qui n'entre en aucune considération, puisque les courbes données AZE & ASF, pourroient être même discontinues.

24. Nous avons donc besoin de quelques déterminations accessoires, qui nous découvrent les véritables appliquées de nos deux courbes données, lorsqu'on prend, ou l'abscisse plus grande que $AE = a$, ou négative. Pour cet effet nous n'avons qu'à regarder les conditions mentionnées ci-dessus, que prennent ou $x = 0$, ou $x = a$, l'appliquée y doit toujours demeurer $= 0$: d'où nous tirons:

$$\Theta: t\sqrt{2gh} + \Theta: -t\sqrt{2gh} + \frac{\Sigma: t\sqrt{2gh} - \Sigma: -t\sqrt{2gh}}{\sqrt{2gh}} = 0, \text{ \&}$$

$$\Theta: (a + t\sqrt{2gh}) + \Theta: (a - t\sqrt{2gh}) + \frac{\Sigma: (a + t\sqrt{2gh}) - \Sigma: (a - t\sqrt{2gh})}{\sqrt{2gh}} = 0,$$

Ayant donc une abscisse, ou plus grande que a, comme $a + u$, ou négative comme $- u$; nous aurons:

$$\Theta: (a + u) + \frac{\Sigma: (a + u)}{\sqrt{2gh}} = - \Theta: (a - u) + \frac{\Sigma: (a - u)}{\sqrt{2gh}}, \text{ \&}$$

$$\Theta: (-u) - \frac{\Sigma: (-u)}{\sqrt{2gh}} = - \Theta: u - \frac{\Sigma: u}{\sqrt{2gh}},$$

d'où l'on pourra toujours aſſigner ces appliquées par celles qui ſe trouvent actuellement entre les limites A & E.

De la propagation du ſon.

Fig. 3. 25. Maintenant pour expliquer la propagation du ſon par la ligne AE, ſuppoſons que par quelque force une petite partie d'air mn ait été ébranlée, & miſe dans l'état repréſenté par la petite courbe mon, où l'air ayant été en repos ſoit relâché ſubitement, tandis que le reſte en Am & nE ſoit encore dans un parfait équilibre; & voyons comment ce dérangement ſe communique ſucceſſivement avec les autres particules de l'air. Dans cette hypotheſe la fonction Σ évanouit, & il ne reſte que la fonction Θ, qui exprime les appliquées de la courbe mon, tant que les abſciſſes tombent dans l'eſpace mn. Or, puiſqu'au commencement, où $t = 0$, les particules d'air hormis l'eſpace mn ſont en équilibre, la ligne entiere qui repréſente cet état initial ſera compoſée de la droite Am, de la courbe mon, & de la droite nE, & partant une ligne mixti igne $AmonE$, dans laquelle prenant une abſciſſe $= u$, l'appliquée donnera la valeur de $\Theta : u$. Enſuite, puiſque $\Theta : (-u) = -\Theta : u$, il faut dans la continuation précédente $AA' = a$, concevoir la même ligne $A\mu\omega\nu A'$, dans une ſituation renverſée. De plus, puiſque

$$\Theta : (a + u) = - \Theta : (a - u),$$

il faut dans la continuation EE' établir la même ligne auſſi renverſée: & ainſi de ſuite pour les autres intervalles $= a$ pris ſur cette ligne de part & d'autre.

26. De là on voit que l'appliquée $\Theta : u$ ſera toujours $= 0$, à moins que l'abſciſſe u, à compter depuis le point A en droite, ne tombe

ou entre les limites $\begin{cases} Am \\ An \end{cases}$ ou entre $\begin{cases} An' \\ Am' \end{cases}$ ou entre $\begin{cases} Am'' \\ An'' \end{cases}$ &c.

ou entre $\begin{cases} -A\mu \\ -A\nu \end{cases}$ ou entre $\begin{cases} -A\nu' \\ -A\mu' \end{cases}$ &c.

Donc

Donc, si nous posons Am = m & An = n, ces limites hors desquelles l'appliquée $\Theta: u$ est partout = o, seront:

$$\text{ou}\begin{cases}m\\n\end{cases}\text{ou}\begin{cases}2a-n\\2a-m\end{cases}\text{ou}\begin{cases}2a+m\\2a+n\end{cases}\text{ou}\begin{cases}4a-n\\4a-m\end{cases}\text{ou}\begin{cases}4a+m\\4a+n\end{cases}\&c.$$

$$\text{ou}\begin{cases}-m\\-n\end{cases}\text{ou}\begin{cases}-2a+n\\-2a+m\end{cases}\text{ou}\begin{cases}-2a-m\\-2a-n\end{cases}\text{ou}\begin{cases}-4a+n\\-4a+m\end{cases}\text{ou}\begin{cases}-4a-m\\-4a-n\end{cases}\&c.$$

En général donc deux limites quelconques seront $\begin{cases}\pm\ 2ia\ \pm\ m\\\pm\ 2ia\ \pm\ n,\end{cases}$ & à moins que l'abscisse u ne tombe entre deux telles limites, l'appliquée $\Theta: u$ sera toujours = o.

27. Prenons à présent un point quelconque X sur la droite AE, posant AX = x, & cherchons les agitations qu'il subira, que nous connoitrons par la quantité y dont la valeur après le tems t est

$$y = \tfrac{1}{2}\Theta: (x + t\sqrt{2gh}) + \tfrac{1}{2}\Theta: (x - t\sqrt{2gh}),$$

& d'abord nous voyons que le premier membre est = o, à moins que $x + t\sqrt{2gh}$, ne tombe entre les limites $\begin{cases}m\\n\end{cases}$ ou $\begin{cases}2a-n\\2a-m\end{cases}$ ou $\begin{cases}2a+m\\2a+n\end{cases}$ &c. Or l'autre membre évanouit toujours: à moins que la quantité $x - t\sqrt{2gh}$, ne tombe entre les limites $\begin{cases}m\\n\end{cases}$ ou son négatif $t\sqrt{2gh} - x$ entre $\begin{cases}m\\n\end{cases}$ ou $\begin{cases}2a-n\\2a-m\end{cases}$ ou $\begin{cases}2a+m\\2a+n\end{cases}$ &c. Donc, si nous supposons AX = $x > n$, cette particule demeurera en repos jusqu'à ce qu'il devienne $x - t\sqrt{2gh} = n$, ou $t = \frac{x-n}{\sqrt{2hg}}$. Ce n'est donc qu'après ce tems, que la particule en X commence à s'ébranler, & ensuite elle sera rétablie en repos après le tems $\frac{x-m}{\sqrt{2gh}}$,

de

de ſorte que l'ébranlement durera un tems $= \frac{n - m}{\sqrt{2gh}}$. D'où l'on voit que chaque particule d'air n'eſt ébranlée que pendant un très petit tems ſelon l'étendue de l'agitation initiale mn, & c'eſt alors que le ſon y eſt ſenti.

28. Il faut donc un tems $t = \frac{x - n}{\sqrt{2gh}}$, avant que le ſon parvienne de n en X, ou qu'il ſoit tranſmis par l'eſpace $nX = x - n$. D'où l'on voit que ce tems eſt proportionel à l'eſpace, tout comme on le ſait par l'expérience. J'ai déjà remarqué, que le tems t eſt exprimé en ſecondes, ſi l'on prend pour g la hauteur d'où tombe un corps grave dans un ſeconde: donc, pendant une ſeconde, poſant $t = 1$, le ſon ſera tranſmis par un eſpace $= \sqrt{2gh}$. Or on ſait que $g = 15\frac{5}{8}$ pieds de Rhin, & ſi le reſſort de l'air eſt contrebalancé par une colomne d'eau de 32 pieds, en ſuppoſant l'eau 800 fois plus peſante que l'air, la hauteur h ſera $= 32,800$ pieds, d'où l'on trouve $\sqrt{2gh} = \sqrt{31\frac{1}{4} \cdot 32 \cdot 800} = 400\sqrt{5} = 894$ pieds. Or on ſait que le ſon eſt tranſmis dans une ſeconde par un eſpace de presque 1100 pieds: & perſonne n'a encore bien découvert la cauſe de cette accélération ſur la Théorie.

29. Mais, après que la particule d'air en X a été ébranlée la premiere fois, elle ſera depuis miſe en agitation encore pluſieurs & même une infinité de fois, car elle ſe trouvera agitée toutes les fois que le tems écoulé t ſera contenu entre les limites ſuivantes

$$t\sqrt{2gh} = \begin{cases} x+m;\ 2a-n-x;\ 2a-n+x;\ 2a+m-x;\ 2a+m+x; \\ x+n;\ 2a-m-x;\ 2a-m+x;\ 2a+n-x;\ 2a+n+x; \end{cases} \&c.$$

Si la ligne AE n'étoit point du tout terminée, la particule en X ne ſeroit ébranlée qu'une ſeule fois; ſi elle n'étoit terminée qu'à une extrèmité A, la diſtance $AE = a$, étant infinie, elle recevroit encore un ébranlement après le tems $= \frac{x + m}{\sqrt{2gh}}$, ce qui eſt l'explication

d'un

d'un écho ſimple. Mais, ſi la ligne AE eſt terminée par les deux bouts A & E, l'ébranlement arrivera pluſieurs fois de ſuite, ce qui ſert à expliquer les échos réitérés. Pour cet effet, il faut que les dernieres particules d'air en A & E, ne ſoient ſuſceptibles d'aucun ébranlement, ce qui eſt une condition néceſſaire pour la production des échos.

30. Puisque nous avons trouvé

$$y = \tfrac{1}{2}\Theta : (x + t\sqrt{2gh}) + \tfrac{1}{2}\Theta(x - t\sqrt{2gh}),$$

il faut encore remarquer, que l'ébranlement de la particule X, n'eſt que la moitié de celui dont la particule mn a été primitivement agitée. Car la quantité y ne reçoit de grandeur, que lorsque l'un ou l'autre membre tombe dans l'intervalle mn; & puisque tous les deux n'y ſauroient tomber à la fois, la quantité y ne deviendra égale qu'à la moitié de l'appliquée dans l'intervalle mn, d'où il s'enſuit, que les agitations de la particule X ſont deux fois plus foibles, que l'agitation primitive dans la particule mn. Cela eſt auſſi une ſuite néceſſaire du principe, que l'effet ne ſauroit être plus grand que la cauſe: car, puisque l'agitation originaire en mn ſe communique également vers AE, à chaque inſtant il y aura deux particules également éloignées de part & d'autre de mn, qui ſeront ébranlées, dont les mouvemens pris enſemble doivent être égaux au mouvement primitif en mn, de ſorte que chacun n'en puiſſe être que la moitié. Mais cette diminution ſera bien plus grande, quand l'agitation en mn ſera répandue en tous ſens: d'où l'on voit que les ſons tranſmis par un tuyau doivent être plus forts.

Explication d'un paradoxe.

31. Il ſe préſente ici un doute, qui n'eſt pas ſi facile à lever: il ſemble que l'agitation qui ſe trouve à préſent en X, pourroit être regardée comme l'agitation primitive en mn, & qu'elle devroit être tranſmiſe auſſi bien en arriere qu'en avant: cependant cela n'arrive pas, puisque nous venons de voir, que l'agitation qui eſt à préſent en X,

ſe tranſmet ſucceſſivement en avant vers E, & point du tout en arriere vers A; il en eſt de même des agitations, qui de *mn* ſe répandent en ſens contraire vers A, qui ſont tranſmiſes dans le même ſens, ſans qu'elles engendrent de nouvelles agitations en ſens contraire. Je fais ici abſtraction des limites A & E, ou je les conſidere comme éloignées à l'infini, puiſque je ne les ai introduites dans le calcul que pour expliquer les *échos*. On demandera donc avec raiſon, quelle eſt la différence entre l'agitation primitive en *mn*, & celle qui en eſt engendrée depuis en X: car, ſi tout eſt en repos excepté les particules auprès de X, qui ſe trouvent déplacées de leur état naturel, il ſemble que cette agitation pourroit être enviſagée comme la primitive, & qu'elle devroit ſe communiquer auſſi bien vers A que vers E. Cependant cela ſeroit tout à fait contraire à l'expérience, & l'on ſait qu'il y a une grande différence entre le lieu où le ſon eſt engendré, & ceux où il eſt apperçu.

32. Il faut donc qu'il y ait une différence eſſentielle entre l'agitation communiquée aux particules d'air en X, & l'agitation primitive en *mn*; & tout revient à découvrir cette différence. Or, ayant introduit dans le calcul l'agitation primitive en *mn*, j'y ai ſuppoſé une reſtriction en négligeant les fonctions marquées par le ſigne Σ, qui renferme cette condition, que les particules de l'eſpace *mn* ayant été déplacées de leur ſituation naturelle, ſe ſoient trouvées ſans aucun mouvement, & que de cet état elles ayent été relâchées ſubitement. De là il faut bien conclure, que ſi les particules de X, après avoir été déplacées, ſe trouvoient toutes à la fois en repos, il en devroit réſulter le même effet que de l'agitation primitive en *mn*. Mais, quoique chaque particule de X, étant parvenue à ſa plus grande digreſſion, y ſoit réduite en repos, cela n'arrive pas dans toutes les particules qui ſont autour de X au même inſtant, & partant c'eſt ici ſans doute, qu'il faut chercher l'explication de notre difficulté.

33. De là on comprend que la propagation dépend non ſeulement du deplacement des particules en *mn*, mais auſſi du mouvement qui

qui leur aura été imprimé au premier instant, qui influe tant sur la propagation, que dans un certain cas elle ne se fait que dans un sens. Il est donc bien important de traiter ce sujet dans toute son étendue, sans négliger les fonctions du signe Σ. Pour cet effet je ne me bornerai pas à une ligne ou tuyau terminé, & je le supposerai infini, puisqu'il ne s'agit plus des *échos*. Qu'au commencement donc les particules d'air contenues dans l'espace mn ayent été ébranlées en sorte, que le point x ait été transporté vers E par un espace $= xz$ appliquée de la courbe donnée mzn, & qu'à ce même point ait été imprimée alors une vitesse $= x$ aussi dans le même sens vers E: où xv appliquée de la courbe donnée mvn exprime l'espace que cette vitesse parcouroit dans une seconde. Qu'on forme par la quadrature de cette courbe mvn une nouvelle $ms\zeta$, en sorte que son appliquée $xs = \frac{mxs}{\sqrt{2gh}}$; & puisque la ligne de vitesse mvn se confond de part & d'autre de l'espace mn avec l'axe même mA & nE, la continuation de la courbe $ms\zeta$ sera vers A l'axe même mA, & vers E la droite $\zeta\epsilon$ parallele à l'axe nE. Fig. 4.

34. Cela posé, prenant un point quelconque X, & posant AX $= x$, après le tems $= t$, il sera poussé vers E par un espace y, de sorte que.

$$y = \tfrac{1}{2}\Theta(x+t\sqrt{2gh}) + \tfrac{1}{2}\Theta(x-t\sqrt{2gh}) + \tfrac{1}{2}\Sigma(x+t\sqrt{2gh}) - \tfrac{1}{2}\Sigma(x-t\sqrt{2gh}),$$

puisqu'ici le dénominateur $\sqrt{2gh}$, qui se trouve §. 22. est déjà, renfermé dans la fonction Σ. Or ici Θ marque les appliquées de la courbe mzn, qui de part & d'autre de l'espace mn se confond avec l'axe, de sorte que $\Theta: u$ est toujours zéro, à moins que u ne soit compris entre les limites Am & An, où A est un point fixe pris à volonté, d'où je compte les abscisses, sans que le tuyau y soit terminé ou fermé. De la même maniere, le caractere Σ marque les appliquées de la ligne A$ms\zeta\epsilon$, de sorte que la valeur de $\Sigma: u$ est zéro, quand $u <$ Am, & égale à $n\zeta =$ Eϵ, quand $u >$ An. Or, si u se trouve entre ces deux limites comme si $u =$ Ax, alors on aura

 $\Sigma: u$

$\Sigma : u = xs$. Il n'eſt pas beſoin d'avertir, que ſi quelque appliquée tomboit en ſens contraire, qu'elle eſt repréſentée dans la figure, il la faudroit conſidérer comme négative.

35. Conſidérons premierement un point X plus éloigné du point fixe A que l'intervalle mn, & puiſque $AX = x$, prenons de part & d'autre les intervalles $XT = X\Theta = t\sqrt{2gh}$, pour avoir $AT = x + t\sqrt{2gh}$, & $A\Theta = x - t\sqrt{2gh}$: & il eſt clair que, tant que $X\Theta < Xn$, il y aura $y = \frac{1}{2}Tt - \frac{1}{2}\Theta\theta = 0$, puiſque $\Theta : AT = 0$; $\Theta : A\Theta = 0$, & $\Sigma : AT = Tt$; $\Sigma : A\Theta = \Theta\theta$. Or, quand le point Θ tombe dans l'eſpace mn, ou que $X\Theta = t\sqrt{2gh} = Xx$, on aura

$$\Theta : AT = 0;\ \Theta : Ax = xz;\ \Sigma : AT = Tt = n\zeta;\ \&\ \Sigma : Ax = xs,$$

& partant $y = \frac{1}{2}(xz + n\zeta - xs)$, qui eſt l'eſpace, par lequel le point X ſera tranſporté de ſon lieu naturel vers E après le tems $t = \frac{Xx}{\sqrt{2gh}}$: Mais, après le tems $t = \frac{Xm}{\sqrt{2gh}}$, on aura $y = \frac{1}{2}n\zeta$, qui demeurera auſſi la valeur de y, lorſque $t > \frac{Xm}{\sqrt{2gh}}$; de ſorte que depuis ce tems il ſera en repos, quoiqu'éloigné de ſon lieu naturel de l'eſpace $= \frac{1}{2}n\zeta$: ſon agitation n'ayant duré que depuis le tems $t = \frac{Xn}{\sqrt{2gh}}$ jusqu'au tems $t = \frac{Xm}{\sqrt{2gh}}$.

36. Conſidérons maintenant un point quelconque X' de l'autre côté de l'eſpace ébranlé mn, de ſorte que $AX = x$, & prenant de part & d'autre les intervalles égaux $X'T' = X'\Theta' = t\sqrt{2gh}$, on voit que, tant que $X'T' < X'm$, ou $t < \frac{X'm}{\sqrt{2gh}}$, le point X' reſtera en repos: mais, ſi T' avance en x, de ſorte que $t = \frac{X'n}{\sqrt{2gh}}$, à cauſe de $\Theta : Ax = xz$; $\Theta : A\Theta' = 0$; $\Sigma : Ax = xs$; & $\Sigma : A\Theta = 0$, on

on aura $y = \frac{1}{2}xz + \frac{1}{2}xs = \frac{1}{2}(xz + xs)$, & après le tems $t = \frac{X'n}{\sqrt{2gh}}$, on aura $y = \frac{1}{2}n\zeta$, qui demeurera depuis constamment la valeur de y, de sorte que cette particule X' aussi après avoir été ébranlée se trouvera éloignée du son lieu naturel vers E de l'intervalle $= \frac{1}{2}n\zeta$. Donc, après que tous les ébranlemens seront passés, toute la ligne d'air AE sera avancée dans la direction AE de l'intervalle $\frac{1}{2}n\zeta$.

37. De là on voit que les ébranlemens des particules X & X', dont l'une est en deçà & l'autre au delà de l'agitation primitive mn, sont tout à fait différentes, vu qu'en X le plus grand déplacement est $= \frac{1}{2}(xz - xs + n\zeta)$, & en $X' = \frac{1}{2}(xz + xs)$: & partant dans ce cas le son est tout autrement transmis en avant qu'en arriere: au lieu que, dans le cas précédent, où les vitesses primitives xv évanouissoient, la propagation étoit de part & d'autre la même. Mais on voit de plus, qu'il seroit possible, que la propagation se fît seulement dans un sens; ce qui arriveroit, s'il y avoit par tout l'espace $mn\ xz - xs + n\zeta = 0$. Pour cet effet, puisque xz & xs évanouissent en m, il faudroit qu'il fût $n\zeta = 0$, & $xs = xz$. Posant donc $xz = z$, $xv = v$, & $xs = \frac{\int v\,dx}{\sqrt{2gh}}$, cette condition exige qu'il soit $z\sqrt{2gh} = \int v\,dx$, & $v = \frac{dz\sqrt{2gh}}{dx}$. Dans ce cas la courbe $ms\zeta$ sera égale & semblable à l'autre mzn, & se rejoindra en n avec l'axe de sorte que $n\zeta = 0$. Alors les particules X situées d'une part de l'espace ébranlé mn vers E, n'en seront point ébranlées, & la propagation ne se fera que vers l'autre part de m vers A.

38. Or c'est précisément le cas des ébranlemens, qui sont produits par une agitation primitive quelconque, lesquels sont toujours tels, que quand même ils seroient primitifs, ils ne se communiqueroient que dans un sens. Pour s'en asseurer on n'a qu'à donner

 à

à z la valeur de y trouvée ci-dessus, & à v la valeur de $\left(\frac{dy}{dt}\right)$; alors on aura

$$z = \tfrac{1}{2}\Theta(x+t\sqrt{2gh})+\tfrac{1}{2}\Theta(x-t\sqrt{2gh})+\tfrac{1}{2}\Sigma(x+t\sqrt{2gh})-\tfrac{1}{2}\Sigma(x-t\sqrt{2gh}),$$

$$\frac{v}{\sqrt{2gh}} = \tfrac{1}{2}\Theta'(x+t\sqrt{2gh})-\tfrac{1}{2}\Theta'(x-t\sqrt{2gh})+\tfrac{1}{2}\Sigma'(x+t\sqrt{2gh})+\tfrac{1}{2}\Sigma'(x-t\sqrt{2gh}),$$

& prenant le différentiel de z, en ne supposant que x variable,

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \tfrac{1}{2}\Theta'(x+t\sqrt{2gh})+\tfrac{1}{2}\Theta'(x-t\sqrt{2gh})+\tfrac{1}{2}\Sigma'(x+t\sqrt{2gh})-\tfrac{1}{2}\Sigma(x-t\sqrt{2gh}).$$

Or il n'y a toujours, comme nous avons vu ci-dessus, que l'une des deux abscisses $x + t\sqrt{2gh}$, ou $x - t\sqrt{2gh}$, à laquelle réponde une appliquée finie. Donc, si c'est la premiere, il y aura évidemment $\frac{dz}{dx} = \frac{v}{\sqrt{2gh}}$; & partant une telle agitation ne sauroit se communiquer que dans un seul sens. Voilà donc la véritable explication du paradoxe proposé.

Pourquoi plusieurs sons ne sont pas confondus?

39. De là on comprend clairement la raison, pourquoi plusieurs sons ne sont pas confondus? question, qui a de tout tems tourmenté les Physiciens. La Théorie du grand Newton, quoique juste au fond, ne paroit pas suffisante pour expliquer ce phénomene, puisqu'elle ne détermine point la véritable nature des ébranlemens, auxquels toutes les particules de l'air sont assujetties. M. de Mairan s'est imaginé, que chaque son, selon qu'il est grave ou aigu, n'est transmis que par certaines particules d'air, dont le ressort lui est convenable. Mais, outre que l'état d'équilibre demande absolument, que toutes les particules d'air soient douées d'un même degré de ressort, cette explication est renversée par les premiers principes, sur lesquels notre Théorie est fondée, & dont la certitude ne sauroit être révoquée en doute. En effet, la propagation ne se rapporte qu'à un seul ébranlement

ment excité dans l'air, & il n'importe pas, ſi celui-ci eſt ſuivi des autres ou non? & encore moins dépend-elle de l'ordre de leur ſucceſſion, d'où l'on juge le grave & l'aigu des ſons.

40. Pour s'éclaircir entierement là deſſus, on n'a qu'à ſuppoſer pluſieurs agitations primitives a, b, c, d, α, β, &c. ſur la ligne droite AE: & en conſidérant une particule d'air quelconque en P, on voit par ce que je viens d'expliquer, que l'agitation α lui ſera communiquée après le tems $\frac{P\alpha}{\sqrt{2gh}}$; enſuite elle recevra l'agitation a après le tems $\frac{Pa}{\sqrt{2gh}}$, & ainſi des autres: de ſorte que chaque agitation eſt tranſmiſe par la même particule P dans un tems déterminé: & une oreille placée en P percevra tous ces ébranlemens, ſans que les uns ſoient troublés par les autres. Il pourra auſſi arriver que deux ébranlemens arrivent au même inſtant à la même particule comme O, les diſtances aO & αO étant égales; mais alors cette particule ſera tout autrement ébranlée, que ſi elle recevoit une ſimple agitation: & elle communiquera enſuite ſon ébranlement, tant en avant qu'arriere. Or c'eſt préciſement le cas, où l'on devroit penſer, que les agitations ſe confondiſſent, ce qui n'arrive pas pourtant, auſſi peu en O qu'en tout autre point P.

Reflexions ſur la Théorie précédente.

41. D'abord il faut remarquer, que je n'ai ici conſidéré la propagation, que ſur une ligne droite, ou comme ſi l'air étoit renfermé dans un tuyau cylindrique fort étroit; d'où l'on pourroit penſer, que dans un air libre elle devroit ſuivre des loix tout à fait différentes. Du moins eſt il évident, que les agitations étant répandues en tous ſens, doivent diminuer bien plus conſidérablement que dans le cas d'un tuyau: mais, pour ce qui regarde la nature des ébranlemens, & la viteſſe dont elles ſont tranſmiſes à des diſtances quelconques, il ſemble

ble certain, qu'il en ſera de même dans l'air libre que dans un air renfermé dans un tuyau; car, puisque le ſon, de même que la lumiere, ſe communique par des lignes droites, qu'on peut nommer des rayons ſonores, la tranſmiſſion par chacune de ces lignes droites doit ſuivre les mêmes regles que je viens de découvrir, avec cette ſeule différence, que les agitations deviendront d'autant plus foibles, plus ſera grande la diſtance. Cependant il ſeroit fort à ſouhaiter qu'on fût en état de réſoudre le même probleme dans le cas d'un air libre.

42. En ſecond lieu, c'eſt toujours une grande difficulté, que le ſon parcourt effectivement un plus grand eſpace, que celui que la Théorie indique: je reconnois à préſent que les ébranlemens ſuivans n'en ſauroient être la cauſe, comme je me l'étois imaginé autrefois. Mais il faut bien comparer le cas de l'expérience avec celui, auquel la Théorie eſt adſtreinte. Sans prétendre que l'air libre puiſſe cauſer cette différence, il faut ſe ſouvenir que notre calcul ſuppoſe des agitations quaſi infiniment petites, qui produiroient des ſons trop foibles, pour qu'on puiſſe obſerver la diſtance de leur propagation pendant une ſeconde. Donc, puisque les ſons qu'on a employés dans les expériences, ſont produits par des agitations très fortes, il eſt fort vraiſemblable, que dans l'équation principale §. 17. qui eſt

$$\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = 2gh\left(\frac{ddy}{dx^2}\right),$$

il n'eſt plus permis de négliger le terme $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$, comme j'ai fait dans le calcul précédent. Peut-être que c'eſt ici qu'il faudroit chercher le dévelopement de cette difficulté.

43. Enfin, quoique ce ſoit à Mr. de la Grange qu'on eſt redevable de cette importante découverte, je me flatte que ce Mémoire ne manque pas de recherches très intéreſſantes. Car, outre

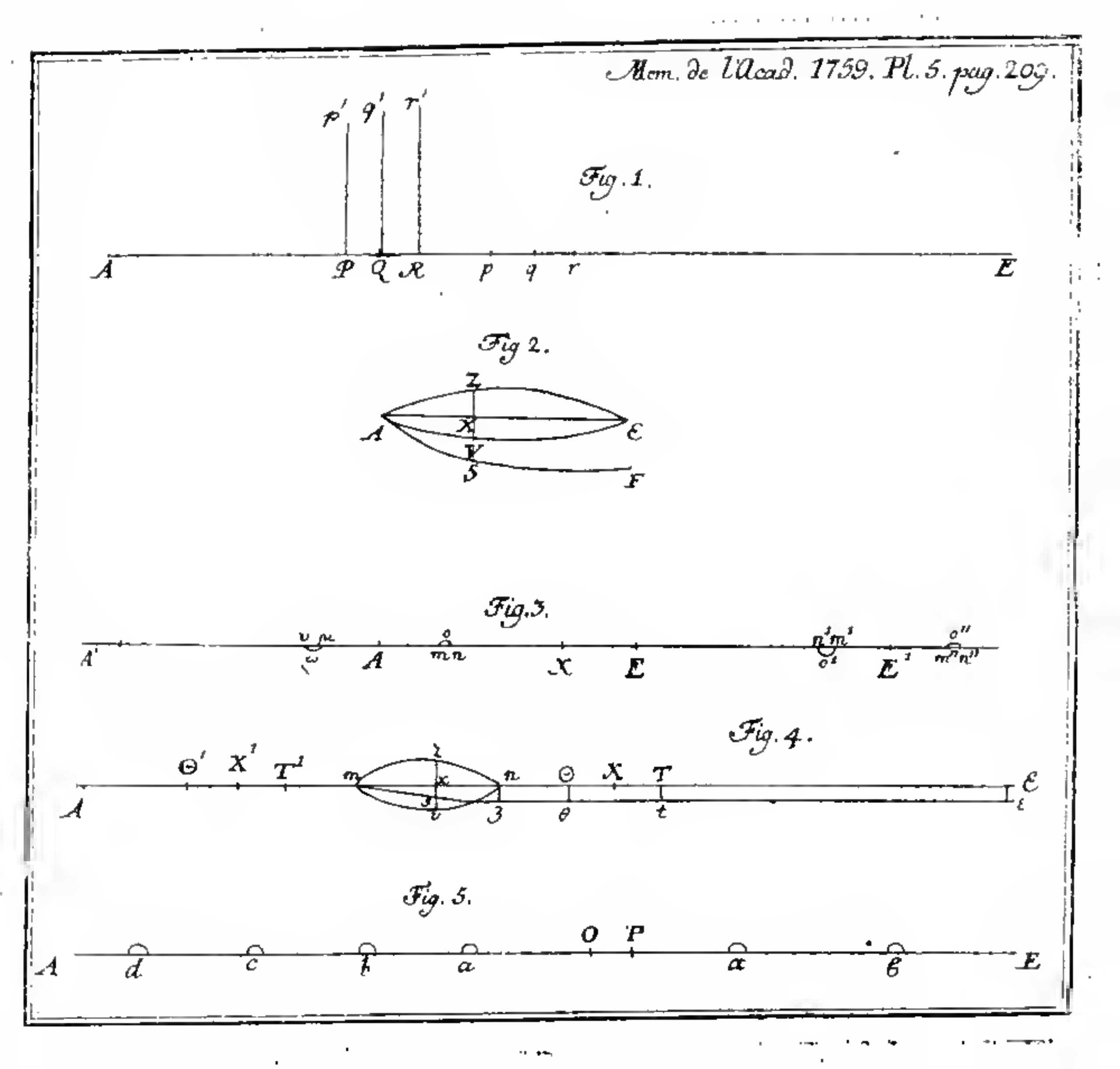


Fig. 1.
p' q' r'
A P Q R p q r E
Fig 2.
Z
A X E
V
S F
Fig. 3.
A' υ μ ω A o m n X E n' m' o' E' o'' m'' n''
Fig. 4.
Θ' X' T' m z x n Θ X T E
A 3 υ 3 θ t ε
Fig. 5.
O P
A d c b a α β E

tre que mon analyſe eſt très ſimple, j'y ai mis dans tout ſon jour l'uſage des fonctions diſcontinues, conteſté par quelques grands Géometres, mais qui eſt abſolument néceſſaire toutes les fois, qu'il s'agit de trouver par intégration des fonctions de deux ou pluſieurs variables, & que l'on demande une ſolution générale. Enſuite, quoique la réſolution ſoit ſemblable à celle des cordes vibrantes, que j'ai donnée autrefois, j'ai ici déterminé avec plus d'exactitude les fonctions arbitraires par les conditions propres à la nature de la queſtion. Mais auſſi cette ſolution appliquée aux cordes eſt plus générale, puisque pour l'état initial on ne peut pas ſeulement donner à la corde une figure quelconque, mais auſſi à tous ſes élémens un mouvement quelconque; ce que je n'avois par remarqué dans mon Mémoire là deſſus, ni même ceux qui ont traité la même matiere. Enfin je crois que l'explication du paradoxe, que les ébranlemens cauſés par la propagation du ſon ſont d'une nature tout à fait différente que les primitifs, nous fournit des éclairciſſemens très conſidérables dans cette matiere épineuſe.

